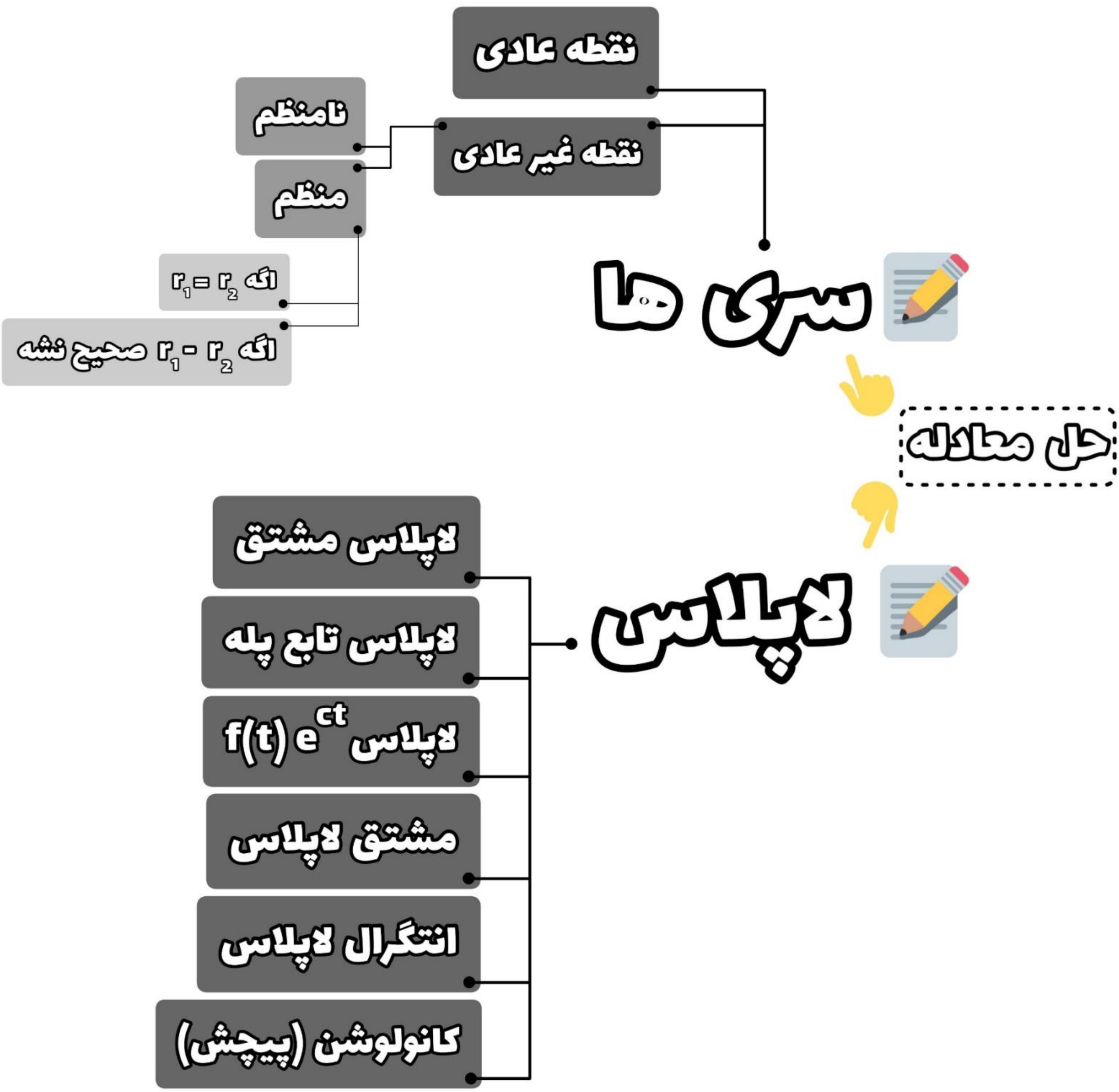
حتما باید قبل از خوندن این جزوه، **نسخه اولش** رو خونده باشی

چند تا نکته که به کارت میاد :

- دانشگاه دو حالت داره: یا نمیخونی و میفتی یا میخونی و میندازنت😂 سخت نگیر
- تو به کسی تبدیل میشی که بیشتر اوقات بهش فکر می‌کنی!
- درد موقت رو برای لذت بلند مدت بپذیر! سختی ها فانی اند، سرسختی ها باقی!
- آلبرت اینشتین : اگر نتونی مطلبی رو به زبون ساده توضیح بدی، یعنی اونو نفهمیدی!
- به جای شکایت از دیگران، خودتو اصلاح کن، چون کفش پوشیدن راحت از فرش کردن دنیاست!
- اصل پارتو : فقط **بیست درصد** کارها (مهم ها)، **هشتاد درصد** نتیجه رو بهت میدن...
- توهم دانایی بدتر از نادانیه! (بهتره ندونی تا فکر کنی میدونی)

- این جزوه به هیچ وجه رایگان نیست، هزینه اش پرداخت حداقل یک انتقاد به نویسنده برای بهتر شدنشه🙃 و فرستادنش به حداقل دو نفر از بهترین دوستاته...🥰
- از پرینت غافل نشو، جزوه ای که جرم داره تاثیر بیشتری روی یادگیری داره...

نقشه راهنما (یه وقت گم نشی😅)



سری چیه؟!

به مجموع (یعنی جمع) یه دنباله از عددها میگن سری و با Σ نشونش میدن.

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_m$$

سری توانی چیه؟!

سری هایی که حول یه نقطه ای مثل **a** به توان برسن (این یعنی منهای اون عدد میشن)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n = (x-a)^1+(x-a)^2+\cdots+(x-a)^n$$

یعنی به n از صفر تا بی نهایت عدد بدی و با هم جمع کنی

معمولا ما a رو صفر میگیریم

نقطه عادی و غیرعادی معادله چیه؟

اگه یادت باشه قبلا گفتم معادله استاندارد این شکلیه که ضریب **"y** باید یک باشه، اگه نبود خودت استانداردش کن.

حالا هر عددی که مخرج ضریب هارو صفر کنه بهش میگیم غیرعادی (تو حسابان می‌گفتیم تعریف نشده یادته😊)

مثلا) نقاط غیرعادی این معادله چین؟

$$(x^2-4)(x+1)y''+(x+1)y'+(x^2-4)y=0$$

$$(x^2-4)(x+1)y''+(x+1)y'+(x^2-4)y=0$$

خب همه رو به ضریب "y تقسیم می‌کنیم تا یک بشه

$$y''+\frac{y'}{(x^2-4)}+\frac{y}{(x+1)}=0$$

پس ۱- و ۲+ و ۲- = x نقاط غیرعادی معادله هستن.

$$x^2-4=0 \longrightarrow x=\pm 2$$

$$x+1=0 \longrightarrow x=-1$$

خود نقطه غیرعادی ها دو نوع اند : منظم و نامنظم

بعد از اینکه استاندارد کردی فرض کن اینجوری بشه : $y'' + ay' + by = \cdots$

دو معادله می‌سازی :

$$b(x-x_0)^2$$ 👈

$$a(x-x_0)$$ 👈

عدد (نقطه غیرعادی) رو میزاری جای x_0

و همه **x** ها (حد می‌گیری) اگه حتی مخرج یکیشو صفر کرد اون نامنظم غیرعادی هستش.

🤔حاجی این مخرجاش کجا بود؟ تو معادله رو بساز می‌بینی عزیزم😉

مثلا) نقاط این معادله رو تحلیل کن $x(x-1)^3y'' + (x-1)y' + (x+1) = 0$

$$x(x-1)^3y''+(x-1)y'+(x+1)y=0$$

استاندارد $\Rightarrow y''+\frac{y'}{x(x-1)^2}+\frac{x+1}{x(x-1)^3}y=0 \Longrightarrow x=0 ,\ x=1$ غیرعادی اند

$a=\frac{1}{x(x-1)^2}$ و $b=\frac{x+1}{x(x-1)^3}$ دو معادله $\Rightarrow a(x-x_0)$ ، $b(x-x_0)^2$

$$x=0 \begin{cases} \frac{(x-0)}{x(x-1)^2}=1 \\ \frac{(x-0)^2(x+1)}{x(x-1)^3}=\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}=0 \end{cases}$$

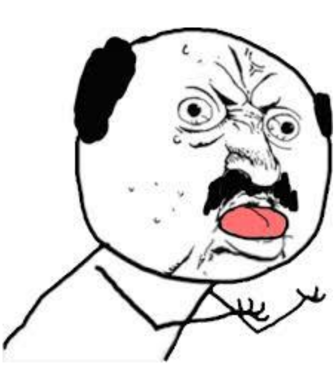
مخرج هارو صفر نکرد

$$x=1 \begin{cases} \frac{(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{0} \\ \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-1)^3}=\frac{2}{0} \end{cases}$$

حداقل مخرج یکی رو صفر کرد

پس $\Rightarrow$ $x=0$ غیرعادی منظم / $x=1$ غیرعادی نامنظم

همه اعداد جز این دوتا نقطه عادی برای این معادله محسوب میشن.



برای اکثر معادله ها، همه نقاط عادی اند، پس اگه گفت حول فلان نقطه، اول چک کن، اگه هم نگفت یعنی همون حول صفر

حالا چطوری با سری توانی معادله دیفرانسیل حل کنیم؟

(برای نقاط عادی)

مرحله اول)

اگه سوال نگه همیشه فرض میکنیم حول صفره؛ جواب این شکلیه و مشتق هاشو هم می نویسیم

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

حول هر نقطه ای خواست اونو میزاری جای t و سری و مشتق هاشو می‌نویسی

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-t)^n$$

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-t)^{n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-t)^{n-2}$$

مرحله دوم) جایگذاری میکنی

مرحله سوم) اول **x** هارو **هم توان** میکنی بعدش سری هارو **هم شروع** می‌کنی

مرحله چهارم) دنباله بازگشتی رو به دست میاری و جواب رو می‌نویسی!

هرچی توان **x** که **n** هستش رو دست‌کاری میکنی، همه **n** های دیگه که داخل سری هستن رو هم همونجوری دست‌کاری کن ،ولی زیر سری رو برعکس حرکت بده

$$\sum_{n}^{\infty} a_n x^n \quad \begin{cases} \sum_{n+1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ \sum_{n-2}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \end{cases}$$

بالا رو نگاه👆 مشتق هم می‌گیری زیر سری برعکسه، اگه جمع کنی، تفریق میشه و برعکس

بعد از هم توان کردن **x** ها تو سری ها، باید سری هارو هم شروع کنی، اونایی که عقب ترن رو از سری بنداز بیرون تا باهم یکی بشن.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{x^0=1}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

هرچقدر نیازه بنداز بیرون و **n** پایین سری رو بیار جلو

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$$

حالا دنباله بازگشتی چیه؟ آخر این حساب کتاب ها به یه رابطه می‌رسی که وقتی به n عدد میدی به یه دنباله می‌رسی که همون جوابه؛ اما بعضی دنباله هارو میشه به یه تابع نسبتش داد (یعنی این تقریبا همون تابع هستش)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \cdots = \sum^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

اگه به سمت راستی ها رسیدی، چپیه رو جاش می‌نویسی

دیگه قطعا گیج شدی رفت پی کارش 🤣 مثال پایین رو به ترتیب بخون بعد بیا اینجا رو دوباره ببین.

مثلا) معادله دیفرانسیل **y'-y=0** رو به روش مزخرف سری ها حل کن😅

حل) چون نگفته حول **x=0** فرضش میکنیم

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y' - y = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

اینجا خودش "هم شروع" شد

$$\text{هم‌توان سازی} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}_{\text{همه n ها رو یکی اضافه کردیم}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} - a_n\right] x^n = 0$$

پس ضریب x^n صفره $\Rightarrow (n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \longrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ معادله بازگشتی

$n=0 \to a_0 = a_1$

$n=1 \to a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$

$n=2 \to a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{6}$

$n=3 \to a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{6\times 4}$

$\vdots$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \cdots =$$

$$a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = a_0 e^x$$

جواب نهایی

مثلا) اینو داشته باش $y'' + xy = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{و} \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$0 = y' - xy = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

گرفتی چی شد : فقط وقتی **x** تو سری ضرب بشه (یعنی پشت **y** باشه مثل این سوال، باید هم توان کنی

هم توان می‌کنیم 👉 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$

هم شروع می‌کنیم 👉 $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$ 👉 $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} - a_{n-1})x^n$

ضرایب مساوی صفر 👉 $a_1 = 0 \qquad (n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0$

دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_{n-1} \quad n \geq 1 \qquad a_1 = 0$

$a_1 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{3}a_1 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{5}a_3 = 0 \quad a_7 = \frac{1}{7}a_5 = 0$ 👉 $a_{2n+1} = 0$

یعنی فرد ها صفرن

$a_2 = \frac{1}{2}a_0 \quad a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4\times 2}a_0 = \frac{1}{2^2\times 2!}a_0$

$a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{2^3\times 3!}a_0 \quad a_8 = \frac{1}{8}a_6 = \frac{1}{2^4\times 4!}a_0$ 👉 $a_{2n} = \frac{1}{2^n\times n!}a_0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots = a_0 + \frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_0}{2^2\times 2}x^4 + \cdots =$$

$$a_0\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\times 2} + \frac{x^6}{2^3\times 3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^n\times n!}\right) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\times n!}x^{2n} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = a_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

حالا معادله رو حول نقطه غیرعادی منظم چطور حلش کنیم؟

اول معادله رو استاندارد می‌کنیم : $y'' + ay' + by = 0$

$$Q = \lim_{x \to x_0} b(x-x_0)^2$$

$$P = \lim_{x \to x_0} a(x-x_0)$$

بعدش مثل نقطه عادی همون دو معادله رو می‌سازی و مثل قبل ازش حد می‌گیری (قبلا هم جای همه ایکس ها می‌گذاشتیم که یعنی همون حد)...

بعدش اون دوتارو در معادله مشخصه میزاری و دو تا ریشه درمیاری

معادله مشخصه : r(r-1)+Qr+P=0

حالا این دوتا ریشه رو که گیر میاری، دو جواب داری که یکیش همیشه ثابته ولی اون یکی بستگی به این داره که ریشه ها برابر بشن یا اختلاف شون صحیح نشه...

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$ اگه $r_1 - r_2$ صحیح نشه

$$y_2 = y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$ اگه $r_1 = r_2$

Learn with video

به سری بالایی میگن فروبنیوس؛ هول نکن، پس همیشه باید r هارو پیدا کنیم و y_1 رو هم گیر بیاریم، کلا هم یادت باشه هرجا قفل کردی سریع برو سراغ مثال

برای حل : اول جواب رو به صورت فروبنیوس خام (یعنی توانش r داشته باشه، نه r_1) فرض میکنیم بعد با مشتق هاش جایگذاری میکنیم، حالا وقتی به معادله بازگشتی رسیدیم، اونجا r هارو میزاریم.

برای حالتی که اختلاف r ها صحیح نشه، دو تا r رو میزاری و هرکدوم یه جواب به صورت سری بهت میدن... حالت دوم رو هم باید تو مثال ببینی، بدو بدو سراغ مثال پایین👇

نکته : وقتی از سری فروبنیوس مشتق می‌گیری، n شروعش همون صفر می‌مونه...

مثلا) بیا اینو حول نقطه صفر حل کنیم $2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$

استاندارد $\Rightarrow y'' + \dfrac{3y'}{2x} - \dfrac{(1+x)}{2x^2} y = 0$

$$Q = \lim_{x \to 0} \frac{(x-0)(3)}{2x} = \frac{3}{2} \qquad P = \lim \frac{(x-0)^2(1+x)}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow r(r-1) + \dfrac{3r}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\Delta} r_1 = \dfrac{1}{2}$ و $r_2 = -1$

$|r_1 - r_2| = \dfrac{3}{2}$ عدد صحیح نیست

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad \text{و} \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \text{و} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری $\Rightarrow 2x^2 y'' + 3x y' - (1+x) y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}$$

هم توان $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r}$

هم شروع $= (2(r)(r-1) + 3r - 1) a_0 x^r + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+r) a_n x^{n+r} -$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r}$$

ضرایب رو مساوی صفر میزاریم

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[[2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1] a_n - a_{n-1} \Big] x^{n+r} = 0$$

$2(r(r-1) + 3r - 1) = 0 \longrightarrow$ که این همون معادله مشخصه است

$$[2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1] a_n - a_{n-1} = 0$$

از اینجا دوتا r هارو به ترتیب میزاریم

$$r = \frac{1}{2} \to a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+3)}$$

$$n=1 \rightarrow a_1 = \frac{a_0}{5}$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2\times 7} = \frac{a_0}{2\times 5\times 7}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3\times 9} = \frac{a_0}{3!\times 5\times 7\times 9}$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4\times 11} = \frac{a_0}{4!\times 5\times 7\times 9\times 11}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!\times 5\times 7\times \cdots \times (2n+3)}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} = a_0 x^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\times 5\times 7\times \cdots \times (2n+3)} \right]$$

$$r=-1 \rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-3)}$$

$$n=1 \rightarrow a_1 = -a_0$$

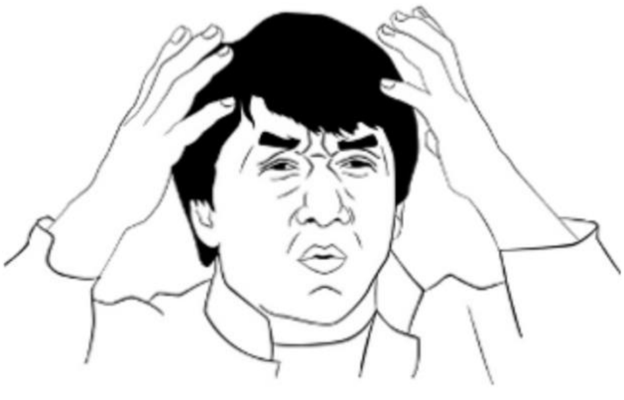
$$n=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2\times 1} = \frac{-a_0}{2!\times 1}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3\times 3} = \frac{-a_0}{3!\times 1\times 3}$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4\times 5} = \frac{-a_0}{4!\times 1\times 3\times 5}$$

$$n=5 \rightarrow a_5 = \frac{a_4}{5\times 7} = \frac{-a_0}{5!\times 1\times 3\times 5\times 7}$$

$$a_n = \frac{-a_0}{n!\times 1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-3)}$$



$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_0 x^{-1} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!\times 1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-3)} \right]$$

جواب کلی $\Rightarrow y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

🤔حالا ممکنه بگی چجوری الگو شو پیدا کردی؟!

اگه دونه دونه میخوای باید خودت قلق گیری کنی، بهش n های مختلف بده...آما آما بین خودمون باشه ☐ یه راه حلی داره که معمولا جواب میده، مثلا تو این سوال :

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{n(2n+3)} \longrightarrow a_n=\frac{a_0}{n!\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}$$

اولی فاکتوریل $n=1$ $n=2$ آخری

ولی کلا میتونی همون a_n (دنباله بازگشتی)

رو بزاری جای a_n تو سری y(x) دیگه

مثلا) بریم که دهنت قراره سرویس بشه😅حول صفر حلش $x^2y''+x(x-1)y'+(1-x)y=0$

استاندارد $\Rightarrow y''+\frac{(x-1)}{x}y'+\frac{(1-x)}{x^2}y=0$

$$Q=\lim_{x\to 0}\frac{(x)(x-1)}{x}=-1$$

$$P=\lim_{x\to 0}\frac{(x)^2(1-x)}{x^2}=+1$$

معادله مشخصه $\Rightarrow r(r-1)-r+1=0 \xrightarrow{\Delta} r=\pm 1$ ریشه مضاعف

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}\ ,\ y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}\ ,\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

جایگذاری $\Rightarrow x^2y''+x(x-1)y'+(1-x)y=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=0$$

هم توان $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}=0$$

هم شروع $\Rightarrow$

$$\big((r-1)r-r+1\big)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big((n+r)(n+r-1)-(n+r)+1\big)a_n+\big((n+r-1)-1\big)a_{n-1}\Big]x^{n+r}=0$$

ضرایب رو مساوی صفر میزاریم

$(r-1)(r)-r+1=0 \longrightarrow$ همون معادله مشخصه است پس هیچی

$$\big((n+r)(n+r-1)-(n+r)+1\big)a_n+\big((n+r-1)-1\big)a_{n-1}=0$$

ریشه مضاعف $(r=1) \longrightarrow a_n=\frac{(n-1)a_{n-1}}{n^2}$

اینجاش یه کوچولو (منظورم خیلی زیاده😅) قلق داره، ولی اینم بهت بگم که معمولا استادا از این قسمت (یعنی r ها برابر بشه) تو امتحان سوال نمیدن، جهت محکم کاری آوردم یاد بگیری...

$$n=1 \rightarrow a_1 = (0)a_0 = 0$$

حالا هرچی n های بیشتر بدی چون a_1 با a_2 و a_2 با a_3 و ... رابطه داره همشون صفر میشن ← برای $n \geq 1$ داریم $a_n=0$

چون n منفی نداریم پس می‌مونه $n=0 \rightarrow y_1 = a_0 x$

$$y_2 = v y_1 \Rightarrow y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{-\int \frac{x-1}{x}dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

حالا ما به صورت سری می‌خوایم $\Rightarrow x \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} dx = x \int \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} dx$

n=0 رو آوردیم بیرون

$$= x\left[\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{n-1} dx\right] = x\ln x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k!k} x^n$$

$$x\ln x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} x^n = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} x^{n+1}$$

جواب آخر $\Rightarrow y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (یادت باشه)

یه سری نکته دم دستی : ما **n** منفی، زیر سری ها نداریم، پس برای "هم توان" کردن یادت باشه اونی که توان **x** اش بیشتره رو باید بیاری عقب که **n** زیر سری (همون **n** شروع) بیاد جلو

برای "هم شروع" شدن باید (معمولا **n** زیر سری ها صفره) به جای **n** ها عدد بدی و بیاری بیرون، اگه نفهمیدی همین الان برگرد مثال هارو نگاه کن...

جالبه حالت دوم (**$r_1 = r_2$**) از همون فرمولی به دست اومده که تو نسخه قبلی گفتم اگه یه **y** رو بده اون یکی رو اینجوری گیر میاریم (**$y_2 = Vy_1$**)، اگه نمیدونی "**V**" چی بود برگرد نسخه اول رو بخون...

لاپلاس

کلا هدف ما اینه که یه جوری معادله دیفرانسیل رو ساده کنیم که بتونیم راحت حلش کنیم.

تو قسمت قبل داشتیم با سری ها اینکارو میکردیم (که سخت تر هم شد ولی اونم یه روشه دیگه، سخت نگیر) حالا اینجا میخوایم از انتگرال کمک بگیریم.

ما با انتگرال یه تابع رو به یه تابع دیگه تبدیل می‌کنیم و بعد از حل دوباره به حالت اول بَرِش می‌گردونیم، به این کلا میگن تبدیل انتگرالی

$$F_{(s)}=\int_{\alpha}^{\beta}\underbrace{K_{(x,s)}}_{\text{هسته تبدیل}}f_{(x)}$$

هسته تبدیل چیزیه که تو تابع مون ضرب میکنیم بعد ازشون انتگرال میگیریم تا به اون تابعی که میخوایم تبدیل بشن (مبدل) که کار ما راحت بشه

پس ما کلی میتونیم از این تبدیل ها داشته باشیم اما یکی از مهم تریناش تبدیل انتگرالی لاپلاس هستتش که به کار ما میاد :

$$F_{(s)}=\int_{0}^{\infty}\underbrace{e}_{\text{هسته تبدیل}}{}^{-st}f_{(x)}dx$$

خب هر تابعی رو در $(e)^{-st}$ ضرب کنی و انتگرال از صفر تا بی‌نهایت بگیری ازش، مبدل لاپلاس‌اش رو گیر میاری

ببین فرقی نداره **f(x)=f(t)** این همونه

مثلا) تبدیل لاپلاس این تابع رو پیدا کن **f(t)=1**

$$L\{1\}=F(s)=\int_0^{\infty}e^{-s\tau}d\tau=\frac{e^{-s\tau}}{-s}=\frac{1}{-s}\left[\frac{1}{e^{s\tau}}\right]_0^{\infty}=0-\left(\frac{1}{-s}\right)=\frac{1}{s}$$

مخرج بی‌نهایت همون صفره <= $\frac{1}{\infty}=0$ به صورت کلی

مثلا) تبدیل لاپلاس این یکی چی میشه **f(t)=t**

$$\int \tau e^{-s\tau}d\tau \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} uv-\int v\,du \longrightarrow \frac{\tau e^{-s\tau}}{-s}+\int\frac{e^{-s\tau}}{s}d\tau=$$

$u=\tau \quad dv=e^{-s\tau}$

$$\frac{\tau e^{-s\tau}}{-s}+\frac{1}{s}\int e^{-s\tau}d\tau=\left[\frac{\tau e^{-s\tau}}{-s}-\frac{e^{-s\tau}}{s^2}\right]_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}$$

مثلا) تبدیل لاپلاس این تابع رو پیدا کن **f(t)=sin(at)**

$$L\{\sin a\tau\} \to \int_0^\infty \underbrace{e^{-s\tau}}_{dv}\, \underbrace{\sin a\tau}_{u}\, d\tau \xrightarrow{\text{جزءبجزء}} \frac{\sin a\tau\, e^{-s\tau}}{-s} + \frac{a}{s}\int \underbrace{e^{-s\tau}}_{dv}\, \underbrace{\cos a\tau}_{u}\, d\tau$$

$$\frac{\sin a\tau\, e^{-s\tau}}{-s} + \frac{a}{s}\left[\frac{\cos a\tau\, e^{-s\tau}}{-s} - \frac{a}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-s\tau}\sin a\tau\, d\tau}_{\text{این همون لاپلاسه } L\{\sin a\tau\}}\right] = L\{\sin a\tau\}$$

حرف L همون لاپلاسه تابع **y** هستش که آخرش ازش لاپلاس معکوس می‌گیری تا خود **y** رو پیدا کنی□

$$\left[\frac{\sin a\tau\, e^{-s\tau}}{-s} - \frac{a}{s^2}\cos a\tau\, e^{-s\tau}\right]_0^\infty - \frac{a^2}{s^2}L\{\sin a\tau] = L\{\sin a\tau\}$$

$$\frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}L\{\sin a\tau\} = L\{\sin a\tau\} = \frac{a}{s^2} = \left(\frac{a^2}{s^2}+1\right)L\{\sin a\tau\}$$

$$\Rightarrow L\{\sin a\tau\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثلا) تبدیل لاپلاس این تابع بیخ ریشِته $f(t) = e^{at}$

$$L\{e^{a\tau}\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} e^{a\tau}\, d\tau = \int e^{(a-s)\tau}\, d\tau = \frac{e^{(a-s)\tau}}{a-s} = \frac{e^{a\tau} e^{-s\tau}}{a-s} =$$

$$\left.\frac{e^{a\tau}}{e^{s\tau}(a-s)}\right]_0^\infty = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

حالا چجوری با لاپلاس معادله دیفرانسیل حل کنیم؟

از تک تک اجزاء معادله لاپلاس می‌گیری، یه طرف لاپلاس تابع رو تنها میکنی، آخرش لاپلاس معکوس می‌گیری تا همه برگردن سرجاشون (وحشت نکن تو مثال متوجه می‌شی)

چند تا قانون کوچولو) بیا لاپلاس تابعی که دنبالشیم **(y)** رو یه چیزی بگیریم که راحت باشیم، مثلا **L**

میدونی اگه از لاپلاس مشتق بگیری (یا حضرت دیفرانسیل😳) چی میشه؟ بیا این دو تا رو هم حفظ کن که خیلی به کارت میاد

$$\mathscr{L}\{f_{(t)}\} = L$$

لاپلاس تابع رو بگیریم L

$$\mathscr{L}\{f'_{(t)}\} = SL - f_{(0)}$$

$$\mathscr{L}\{f''_{(t)}\} = S^2L - Sf_{(0)} - f'_{(0)}$$

جدول لاپلاس تابع های پر کابرد

$f_{(t)}$	$\mathscr{L}\{f_{(t)}\}$	$f_{(t)}$	$\mathscr{L}\{f_{(t)}\}$
1	$\frac{1}{S}$	e^{at}	$\frac{1}{S-a}$
t^n $n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{S^{n+1}}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{a^2-s^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{S^{\frac{2}{3}}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{a^2-s^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{a^2+s^2}$	$f(ct)$	$\frac{1}{c}\mathscr{L}f(\frac{t}{s})$
$\cos(at)$	$\frac{s}{a^2+s^2}$	$u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$

هی خوشگله، همیشه اول سوال

بهت چند تا مقدار اولیه هم میده پس

جوابی که به دست میاد، خصوصیه

خودت بگو جواب خصوصی چی بود؟!

مثلا) بفرما سوال **y"-y'-2y=0** ، y(0)=1 y'(0)=0

$$y''-y'-۲y=۰ \xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{از همه لاپلاس}} S^۲L-Sf_{(۰)}-f'_{(۰)}-SL+f_{(۰)}-۲L=۰$$

$$f'_{(۰)}=۰ \text{ و } f_{(۰)}=۱ \Rightarrow S^۲L-S-SL+۱-۲L=۰$$

$$L(S^۲-S-۲)-S+۱=۰ \rightarrow L=\frac{S-۱}{(S^۲-S-۲)}$$

$$L=\frac{S-۱}{(S-۲)(S+۱)} \xrightarrow[\text{کسرها}]{\text{تفکیک}} \frac{A}{S-۲}+\frac{B}{S+۱}=\frac{S-۱}{(S-۲)(S+۱)} \Rightarrow$$

$$A(S+۱)+B(S-۲)=S-۱ \longrightarrow \begin{array}{l} S=-۱ \Rightarrow -۳B=-۲ \rightarrow B=\frac{۲}{۳} \\ S=۲ \Rightarrow ۳A=۱ \longrightarrow A=\frac{۱}{۳} \end{array}$$

$$L=\frac{\frac{۱}{۳}}{S-۲}+\frac{\frac{۲}{۳}}{S+۱}$$

میگن قلب استخوون نداره

پس اینا چیه توش میشکنه!!!

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-(-1)}\right) = e^{-t}$$ میدونیم دیگه

لاپلاس معکوس $\Rightarrow \underbrace{L^{-1}(L)}_{y} = \frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$

$$y = \frac{1}{3}\left(e^{-2t}\right) + \frac{2}{3}\left(e^{-t}\right)$$

خب غر نزن😡 لاپلاس معکوس اون کسر رو که بلد نیستیم پس باید تفکیک شون کنیم تا ساده بشه؛ پس بگو تفکیک کسر بلد نیستم دیگه

آب دستته بزار زمین□

صفحات **67** تا **74** اینو خوب بخون بعد برگرد اینجا...

مثلا) بفرما سوال **y"+y=sin(2t)** ، y(0)=0 y'(0)=1

لاپلاس می‌گیریم $\Rightarrow L\{y''\} + L\{y\} = L\{\sin 2t\} \Rightarrow$

$$s^2L - sy(0) - y'(0) + L = \frac{2}{s^2+4} \xrightarrow[y'(0)=0]{y(0)=0} s^2L - 1 + L = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L(s^2+1) - 1 = \frac{2}{s^2+4} \longrightarrow (L)(s^2+1) = \frac{2}{s^2+4} + 1 = \frac{s^2+6}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$L = \frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)} \longrightarrow$$

تفکیک کسرها $\Rightarrow \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$

$$(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4) = s^2+6$$

$$As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D = s^2+6$$

$$(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (A+4C)s + B + 4D = s^2+6$$

$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ A+4C=0 \end{array}\right\} A=C=0$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} B+D=1 \\ B+4D=6 \end{array}\right\} B=\frac{-2}{3}$ و $D=\frac{5}{3}$

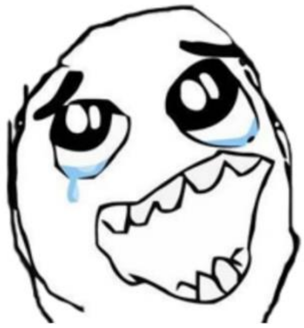
$$\Rightarrow \frac{\frac{-2}{3}}{s^2+4} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} \longrightarrow -\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \Rightarrow$$

$$L^{-1}\{L\{y\}\} = y = -\frac{1}{3}\sin 2t + \frac{5}{3}\sin t$$

مغز عضو جالبیه

از زمان تولد کار میکنه تا

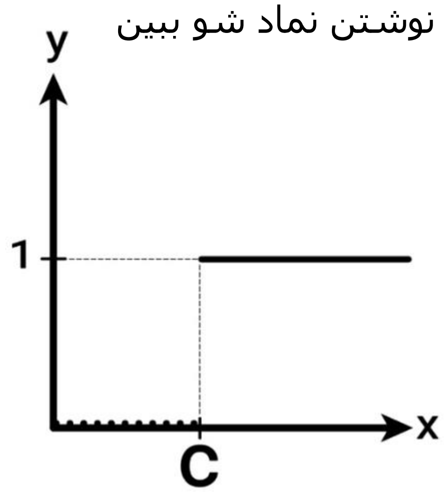
مرگ جز سر امتحانا!!!!!!



بد نیست بدونی : اون مقدار اولیه هارو تا یه مرتبه مشتق کمتر از بزرگترین مشتق (مرتبه معادله) بهت میده، مثلا تو مثال قبلی چون معادله مرتبه دو بود، تا مقدار مشتق اول رو بهت داده بود. (جدی نگیر تا بیشتر از مرتبه دو که حل نمیکنی تو امتحان😉)

تابع پله ای : ببین یه تابع داریم که مقدارش تا قبل یه عددی مثل **c** صفره بعد اون یهو میشه یک، بهش میگیم پله ای، حالا نوع نوشتن نماد شو ببین

$$u_c(t)=u(t-c)=\begin{cases}0 & 0<t<c\\ 1 & c<t\end{cases}$$



خب حالا به چه دردی میخوره؟ وقتی تابع چند ضابطه ای داری برای اینکه بتونی راحت ازش لاپلاس بگیری به این نیاز داری، یعنی چند ضابطه ای هارو به پله ای تبدیل میکنیم چون لاپلاس اونارو بلد نیستیم ولی لاپلاس اینو بلدیم

لاپلاس تابع پله

$$\mathscr{L}\{u_c(t)\}=\frac{e^{-sc}}{s}$$

$$\mathscr{L}\{f_{(t-c)}u_c(t)\}=e^{-sc}\mathscr{L}\{f(t)\}$$

لاپلاس یه تابع ضربدر پله

فقط تابع هارو اینجوری به تابع پله تبدیل میکنی 👈

$$\begin{cases}g & 0<t<c\\ h & c<t\end{cases}\xrightarrow{\text{تبدیل به تابع پله}} g+(h-g)\underbrace{u(t-c)}_{\text{تابع پله}}$$

جیگر اون پرانتزی که جلوی **u** میزارن برای خود تابع پله است، یه وقت فکر نکنی ضربی چیزیه، مثل این می‌مونه فکر کنی **f(x)** یعنی **f** ضربدر **x** هستش🤣 تیق نزنی...

- ببین وقتی یه تابعی تو پله ضرب میشه، تو لاپلاس معکوس گرفتن، لاپلاس معکوس همون تابع رو باید بگیری ولی متغیرش (**همون t**) باید منهای **c** بشه؛ به جای اخم کردن برو مثال سوم و چهارم

فقط وقتی تابع پشت **e** یه عدد شد دیگه منهای **c** نداره (چون متغیر نیست بلکه عدده) [مثال چهار]

مثلا) لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}2 & 0<t<1\\ 4 & 1<t\end{cases}$ **چیه؟!**

$$f(t)=g+(h-g)u(t-c)=۲+۲u(t-1)\xrightarrow{\text{لاپلاس}}$$

$$\mathcal{L}\{۲\}+۲\mathcal{L}\{u(t-1)\}=\frac{۲}{s}+\frac{۲e^{-s}}{s}=\frac{۲(1+e^{-s})}{s}$$

مثلا) لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}2t & 0<t<1\\ 4 & 1<t\end{cases}$ **چیه؟!**

$$f(t)=g+(h-g)u(t-c)=۲t+(۴-۲t)u(t-1)=$$

$$۲t+۴u(t-1)-۲t\,u(t-1)\xrightarrow{\text{لاپلاس}}$$

$$۲\mathcal{L}\{t\}+۴\mathcal{L}\{u(t-1)\}-۲\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}=\frac{۲}{s}+\frac{۴e^{-s}}{s}-۲\left(\left(\frac{1}{s^۲}\right)e^{-s}\right)$$

چون که $\Rightarrow \mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}=e^{-s}\mathcal{L}\{t\}$ یادته

$$\Rightarrow \frac{۲-۴e^{-s}}{s}-\frac{۲e^{-s}}{s^۲} \qquad \frac{۲}{s}+\frac{۴e^{-s}}{s}-۲\left(\left(\frac{1}{s^۲}\right)e^{-s}\right)$$

مثلا) معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{S^2}$ **چیه؟!**

تفکیک می کنیم $\Rightarrow \frac{1}{s^۲}-\frac{e^{-۲s}}{s^۲}\xrightarrow[\text{وارون}]{\text{لاپلاس}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^۲}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-۲s}}{s^۲}\right\}=t-u(t-۲)(t-۲)$

به صورت چندضابطه‌ای $\Rightarrow \begin{cases}t & 0<t<۲\\ ۲ & ۲<t\end{cases}$

مثلا) معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\dfrac{1-e^{3s}}{S}$ **چیه؟!**

تفکیک می کنیم $\Rightarrow \frac{1}{s}-\frac{e^{۳s}}{s}\xrightarrow{\text{لاپلاس وارون}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{۳s}}{s}\right\}=1-u(t+۳)$

حالا بریم ببینیم چجوری با تابع پله و لاپلاس‌اش معادله دیفرانسیل حل کنیم...

مثال) معادله $y''+y=h(t)$ **رو حل کنید** $y(0)=0 \quad y'(0)=0$

$$h(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 2 & t>1\end{cases}$$

$$y''+y=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases} \implies g+(h-g)u(t-c) \implies y''+y=2u(t-1)$$

فرض می‌کنیم $\implies \mathcal{L}\{y\}=L$ پس می‌دونیم $\implies \mathcal{L}\{y''\}=s^2L-sf(0)-f'(0)$

از طرفی $\implies y(0)=f(0)=0$ و $y'(0)=f'(0)=0$

از همه لاپلاس بگیر $\implies \mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y\}=2\mathcal{L}\{u(t-1)\}=$

$$s^2L\underbrace{-sf(0)-f'(0)}_{\text{صفر}}+L=\frac{2e^{-s}}{s} \implies \underbrace{s^2L+L}_{L(s^2+1)}=\frac{2e^{-s}}{s} \to L=\frac{2e^{-s}}{s(s^2+1)}$$

e^{-s} رو میذاریم کنار و بعد تفکیک کسر $\implies L=e^{-s}\left(\frac{2}{s(s^2+1)}\right) \to$

$$\begin{cases}\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{2}{s(s^2+1)}\\ As^2+A+Bs^2+Cs=2\\ (A+B)s^2+Cs+A=2\\ A+B=0 \text{ و } C=0 \text{ و } A=2\\ \text{پس} \to B=-2\\ \implies \frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\end{cases}$$

پس $\implies L=e^{-s}\left(\frac{2}{s}\right)-e^{-s}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right)$

لاپلاس معکوس $\implies \mathcal{L}^{-1}\{L\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{2}{s}\right)\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right)\right\}=$

$$y=2u(t-1)-2\cos(t-1)u(t-1)=$$

$$y=u(t-1)\left[2-2\cos(t-1)\right]$$

خب تا الان از هرچی $(e)^{-st}$ بود لاپلاس معکوس گرفتن رو بلد بودی که میشد خود تابع پله

حالا از تابع $(e)^{ct}$ لاپلاس بگیری چی میشه؟

$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sc}\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t-c)\,u(t-c)$ **اینو بلد بودیم**

$\mathcal{L}\{f_{(t)}e^{ct}\} = \mathcal{L}f(s-c)$

یا برعکسش $f_{(t)}e^{ct} = \mathcal{L}^{-1}f(s)$

لاپلاس یه تابع ضربدر تابع e^{ct}

در واقع تابع رو انگار تغییر متغیر میدیم به طوری که لاپلاس معکوس تابع جدیده رو بلد باشیم، لاپلاس معکوس هم می‌گیریم منتها یه $(e)^{ct}$ هم کنار دستش میزاریم...

مثلا) لاپلاس معکوس این تابع $\frac{1}{s^2-4s+5}$ چی میشه؟!

$$\frac{1}{s^2-4s+5} \xrightarrow{\text{مربع کامل}} \frac{1}{(s-2)^2+1} \xrightarrow{s-2=s'} \underbrace{\frac{1}{s'^2+1}}_{\sin t \text{ لاپلاس معکوس}} = e^{2t}\sin t$$

مشتق لاپلاس

برای لاپلاس گرفتن از بعضی تابع هایی که سخت ترن (معمولا ضرب دوتا تابع) میتونیم یه کاری کنیم : اول بیا از خودِ لاپلاسِ یه تابع، طبق تعریفی که اون بالا بالاها گفتم مشتق بگیریم ببینیم به چی می‌رسیم...

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$ **خود لاپلاس**

$$F'(s) = \int_0^\infty e^{-sx}(-x) f(x)dx$$ **مشتق لاپلاس**

$$F''(s) = \int_0^\infty e^{-sx}(-x)^2 f(x)dx$$ **مشتق دوم لاپلاس**

یعنی اگه کنار یه تابع **X-** بود، لاپلاس خود تابع رو بگیر و بعد از لاپلاسه یه مشتق بگیر

- اگه کنار یه تابع، $(X)^2$ بود، لاپلاس خود تابع رو بگیر و از لاپلاسش دوبار مشتق بگیر

و تموم...

$$\mathcal{L}\{-xf(x)\} = F'(s)$$ و $$\mathcal{L}\{(-1)^2x^2f(x)\} = F''(s)$$

پس کلا اینجوری میشه 👈 $$\mathcal{L}\{(-1)^n x^n f(x)\} = F^{(n)}(s)$$

کلا حواست باشه دیگه، **x** هایی که توان فرد دارن یه منفی هم کنارشون هست، اگه نبود خودت موقع لاپلاس گرفتن بزار (مثل این مثال)

مثلا) لاپلاس اینو بگیر **y=tsin(at)**

$$\mathcal{L}\{t\sin at\} = -\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)' = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

لاپلاس خود $\underbrace{\sin at}$ رو بگیر بعد ازش یه بار نسبت به S مشتق بگیر

مثلا) لاپلاس اینو بگیر **y=t^2sint**

$$F(s) = \ln\left(\frac{s}{s-1}\right) \xrightarrow{\text{دو طرف مشتق}} F'(s) = \frac{-1}{s(s-1)}$$

$$\boxed{(\ln f(s))' = \frac{f'}{f}} \quad \text{<= یادآوری}$$

$$\text{می دونیم که} \Rightarrow \mathcal{L}\{-t f(t)\} = F'(s) = \frac{-1}{s(s-1)} \xrightarrow{\text{دو طرف لاپلاس معکوس}} -t f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s(s-1)}\right\}$$

$$\text{تفکیک کسر} \Rightarrow \frac{-1}{s(s-1)} \rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = \frac{-1}{s(s-1)} \rightarrow A(s-1) + Bs = -1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}}$$

$$-t f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right\} \Rightarrow -t f(t) = 1 - e^{t} \longrightarrow f(t) = \frac{1-e^{t}}{-t} = \frac{e^{t}-1}{t}$$

مثلا) لاپلاس اینو بگیر **y=$(cot)^{-1}$**

$$F(s) = \cot^{-1}(s+1) \xrightarrow{\text{مشتق}} F'(s) = \frac{-1}{(s+1)^2+1}$$

$$\boxed{(\cot^{-1}(u))' = \frac{-u'}{1+u^2}} \quad \text{<= یادآوری}$$

مشتق کتانژانت عبارت u

$$\text{می دانیم} \Rightarrow \mathcal{L}\{-t f(t)\} = F'(s) \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} -t f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$-t f(t) = -e^{-t}\sin t \longrightarrow f(t) = \frac{1}{t} e^{-t}\sin t$$

$$\text{یادآوری} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct} f(t) \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{c=-1} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\sin t} \rightarrow e^{-t}\sin t$$

انتگرال لاپلاس

اگه از لاپلاس یه تابع انتگرال بگیری (از **s** تا **بی‌نهایت**) این مساوی لاپلاس همون تابع به روی متغیر خودشه، ایناهاش :

خب بریم مثال حل کنیم ببینیم به چه دردی می‌خوره؟

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \underbrace{F(s)}_{\text{لاپلاس خود f}}\,ds$$

مثلا) لاپلاس اینو بگیر $g(t)=\frac{cos(t)-cos(2t)}{t}$

$$g(\tau)=\frac{\cos\tau-\cos(2\tau)}{\tau}\longrightarrow \underbrace{f(\tau)=\cos\tau-\cos(2\tau)}_{\text{خودمون اینو گرفتیم}}$$

پس یه تابعی $(f(\tau))$ روی متغیر خودشه (همون τ)

می‌دونیم که $\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{f(\tau)}{\tau}\right\}=\int_s^\infty F(s)\,ds$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(\tau)\}=\mathcal{L}\{\cos\tau-\cos2\tau\}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \int\frac{s\,ds}{s^2+1}-\int\frac{s}{s^2+4}ds=\frac{1}{2}Ln(s^2+1)-\frac{1}{2}Ln(s^2+4)\Big]_s^\infty\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[Ln(s^2+1)-Ln(s^2+4)\right]_s^\infty=\frac{1}{2}\left[Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right]_s^\infty=0-\frac{1}{2}Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)=Ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+1}\right)$$

$$Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\Big]_s^\infty\longrightarrow \lim_{s\to\infty}Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)=Ln\left(\frac{s^2}{s^2}\right)=Ln(1)=0$$

یادآوری $\Leftarrow$

وقتی بی‌نهایت می‌زاری باید بیشترین توان رو روی بیشترین توان بزاری

یادآوری ۲ $\Leftarrow$ $Ln(a)-Ln(b)=Ln\left(\frac{a}{b}\right)$

مثلا) لاپلاس معکوس اینو بگیر $F(s)=\frac{s}{(s^2-4)^2}$

$F(s)=\frac{s}{(s^2-4)^2}$ می‌دونیم $\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{f(\tau)}{\tau}\right\}=\int_s^\infty F(s)\,ds$ معلومه دنبال $f(\tau)$ هستیم

$$\int_s^\infty\frac{s}{(s^2-4)^2}ds\Rightarrow \begin{matrix}s^2-4=u\\ 2s\,ds=du\to ds=\frac{du}{2s}\\ s=\sqrt{u-4}\end{matrix}\Rightarrow\int_s^\infty\frac{\sqrt{u-4}}{u^2}\frac{du}{2(\sqrt{u-4})}=\int_s^\infty\frac{du}{2u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{u}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{s^2-4}\right]_s^\infty$$

$$=\frac{-1}{2}\left(0-\frac{1}{s^2-4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)=\int_s^\infty F(s)\,ds=\mathcal{L}\left\{\frac{f(\tau)}{\tau}\right\}\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}\frac{f(\tau)}{\tau}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{f(\tau)}{\tau}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4}\right\}\Rightarrow\frac{f(\tau)}{\tau}=\frac{1}{4}\sinh(2\tau)\longrightarrow f(\tau)=\frac{\tau}{4}\sinh(2\tau)$$

مجبوریم تو صورت ۲ داشته باشیم پس
$\frac{1}{2}$ گذاشتیم پشتش که درست بشه

مثلا) لاپلاس اینو بگیر $g(t)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$

$F(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$ می‌دانیم $\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{f(\tau)}{\tau}\right\}=\int_s^\infty F(s)\,ds$ دنبال $f(\tau)$ هستیم

$$\int_s^\infty\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}ds\to\begin{matrix}s^2+4s+5=u\\(2s+4)ds=du\to ds=\frac{du}{2(s+1)}\end{matrix}\to\int_s^\infty\frac{(s+2)}{u^2}\frac{du}{2(s+1)}=\frac{1}{2}\int_s^\infty\frac{1}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+4s+5)}\right]_s^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{(s^2+4s+5)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}\ \frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}=\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t$$

$$f(t)=\frac{t}{2}e^{-2t}\sin t$$

$$\text{یادآوری} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}=e^{ct}f(t)\rightarrow \frac{1}{\underset{c=-2}{(s+2)^2+1}} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{s'^2+1}}_{\sin t} \Rightarrow e^{-2t}\sin t$$

Learn with video

کانولوشن (پیچش) دو تابع

میدونستی میتونی دو تا تابع رو تو هم حل کنی؟ 🤣 طبق قانون پایین اگه متغیر یکی شونو کلا یه چیز دیگه بگیری (مثلا **t** رو کلا **x** بگیری) و متغیر اون یکی رو **t-x** بگیری و ازشون از صفر تا **t** انتگرال بگیری بهش میگن پیچش دو تابع، فقط آخرش خوب هم بزن که شیرین بشه 😁

خب به چه دردی میخوره؟ عجله نکن اول چندتا ازش حل کن تا یاد بگیری بعد بهت میگم...

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx$$

پیچش f و g

مثلا) کانولوشن دو تابع **t** و e^t رو گیر بیار

اگه فرض کنیم $f(t)=t$ و $g(t)=e^t$

$$f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=\int_0^t x e^{t-x}\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \boxed{\begin{array}{l} u=x \\ dv=e^{t-x} \\ du=dx \\ v=-e^{t-x} \end{array}}$$

$$uv-\int v\,du \rightarrow -xe^{t-x}+\int e^{t-x}\,dx =$$

$$-xe^{t-x}-e^{t-x}=e^{t-x}\left[-x-1\right]_0^t=-t-1-e^t(-1)=e^t-t-1$$

مهم نیست که کدوم تابع رو **f** بگیری و کدوم رو **g** بگیری، هرجور راحتی چون به یه جواب می‌رسی...

اینم چند تا ویژگی پیچش که تقریبا هر بلایی میتونی سرش بیاری چند تا فرمول تبدیل "ضرب به جمع" مثلثاتی رو هم حتما باید بلد باشی...

$$f*g=g*f$$

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

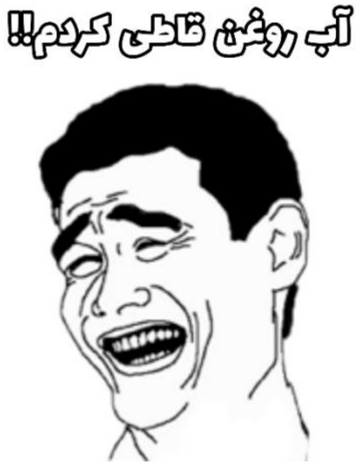
$$f*0=0*f=0$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\beta.\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$



مثلا) کانولوشن تابع **cos(t)** رو با خودش گیر بیار

$$f(\tau)=\cos\tau \qquad f*f=\int_0^\tau \cos x\cos(\tau-x)dx=\frac{1}{2}\int_0^\tau(\cos\tau+\cos(2x-\tau))dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\int_0^\tau \cos\tau\, dx+\underbrace{\int_0^\tau \cos(2x-\tau)\,dx}_{\substack{2x-\tau=u\\ 2dx=du\rightarrow dx=\frac{du}{2}}}\Big]=\frac{1}{2}\Big[x\cos\tau+\int_0^\tau \frac{\cos u\, du}{2}\Big]=$$

$$\frac{1}{2}\Big[x\cos\tau+\frac{\sin u}{2}\Big]_0^\tau=$$

$$\frac{1}{2}\Big[x\cos\tau+\frac{\sin(2x-\tau)}{2}\Big]_0^\tau=\frac{\tau\cos\tau-\sin\tau}{2}$$

مثلا) کانولوشن تابع **cos(t)** رو با **1** گیر بیار

$$(f*1)(t)=\int_0^t \cos(x)dx=\sin t$$

پس معلومه که **"f * 1"** با **"خود f"** لزوما مساوی نیست، فکر نکنی مثل ضرب در یکه😉

اما چه ربطی به لاپلاس و دیفرانسیل داره؟ ایناهاش

- میگه اگه لاپلاس دو تا تابع رو تفکیک کنی (مثلا میشه دوتا کسر) بعد معکوس بگیری و اون دوتایی که به دست میان رو اگه کانولوشن بگیری، تابع اصلی رو گیر میاری (قول میدم این آخریشه، برو سراغ مثال👇)

$$\mathscr{L}(f*g)=\mathscr{L}f.\mathscr{L}g$$

یا

$$(f*g)=\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}f.\mathscr{L}g)$$

مثلا) معکوس لاپلاس این یارو چی میشه **F(s)=** $\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$

تفکیک کنیم $\Rightarrow \frac{1}{s^2}\times\frac{a}{s^2+a^2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} (t * \sin at) = \int_0^t (t-x)\sin ax\, dx$

$= \int_0^t t\sin ax\, dx - \int_0^t x\sin ax\, dx \xrightarrow{\text{خودت حساب کن}} \frac{at-\sin at}{a^2}$

چون که $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}f\cdot\mathcal{L}g\} = f*g$

Learn with video

مثلا) معکوس لاپلاس تابع $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ رو گیر بیار

تفکیک می کنیم $\Rightarrow \frac{1}{s^2+1}\times\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} (\sin t * \sin t) = \int_0^t \sin x \sin(t-x)\, dx =$

$\frac{1}{2}\int_0^t \cos(2x-t) - \cos t\; dx \xrightarrow{\text{خلاصه}} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x-t) - x\cos t\right]_0^t =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t - t\cos t - \frac{1}{2}\sin(-t)\right) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

ببین ما مستقیم بلد نیستیم معکوس لاپلاس اینارو بگیریم ولی با
کانولوشن میتونیم سر هم بیاریمش🙄

یادت باشه برای لاپلاس معکوس گرفتن، تابعی که داده رو به دو تا تابعی
تفکیک کنی که لاپلاس معکوس هر کدوم رو بلد باشی

مثلا) معکوس لاپلاس تابع **F(s)=** $\frac{1}{(s-1)(s+2)}$ رو گیر بیار

تفکیک می کنیم $\Rightarrow \frac{1}{s-1}\times\frac{1}{s+2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} (e^t * e^{-2t}) = \int_0^t e^x e^{-2(t-x)}\, dx =$

$\int_0^t e^x e^{-2t} e^{2x}\, dx = e^{-2t}\int_0^t e^{3x}\, dx = e^{-2t}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^t = \frac{e^t - e^{-2t}}{3}$

برای بهتر فهمیدن باید بدونی مثلا اگه به جای ضرب، جمع بود راحت
لاپلاس معکوس می‌گرفتیم (قبل از کانولوشن همینجوری یاد گرفته بودی)
همین مثال بالا اینجوری می‌شد 👇

$\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} e^t + e^{-2t}$

مثلا) دهنتو شیرین کن به این معادله دیفرانسیل **y"+9y=t** y'(0)=0 , y(0)=0

از همه لاپلاس بگیر $\Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\} \Rightarrow s^2L - \underbrace{sf(0) - f'(0)}_{=0} + 9L = \frac{1}{s^2} \rightarrow$

$$s^2L+9L=\frac{1}{s^2} \longrightarrow L(s^2+9)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow L=\frac{1}{s^2(s^2+9)}$$

$$\xrightarrow{\text{ازهم لاپلاس معکوس}} \mathcal{L}^{-1}\{L\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+9)}\right\} \Rightarrow y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\times\frac{1}{s^2+9}\right\} \Rightarrow$$

$$y=\left(t * \frac{\sin 3t}{3}\right)=\int_0^t \frac{1}{3}\sin(3x)(t-x)\,dx \xrightarrow[\text{خلاصه}]{\text{جزء به جزء}} y(t)=\frac{1}{9}\left(t-\frac{1}{3}\sin(3t)\right)$$

مثلا) این معادله دیفرانسیل رو حل کن **y"+y=2t**   y'(0)=0 , y(0)=0

اینو به دو روش حل کردم ببینی یادآوری بشه😁

راه اول (با کانولوشن)

$$y''+y=2t \xrightarrow{\text{لاپلاس}} \mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y\}=2\mathcal{L}\{t\} \longrightarrow s^2L-sf(0)-f'(0)+L=\frac{2}{s^2}$$

$$s^2L+L=\frac{2}{s^2} \longrightarrow L(s^2+1)=\frac{2}{s^2} \longrightarrow L=\frac{2}{s^2(s^2+1)} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} \mathcal{L}^{-1}\{L\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+1)}\right\}$$

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\times\frac{1}{s^2+1}\right\} \longrightarrow y=(2t * \sin t)=\int_0^t (\sin x)(2)(t-x)\,dx \longrightarrow$$

$$2\left[\int_0^t t\sin x-\int_0^t x\sin x\right]=2\left[-t\cos x+x\cos x-\sin x\right]_0^t \longrightarrow$$

$$2\left[(-t\cos t+t\cos t-\sin t)-(-t)\right]=2t-2\sin t=2(t-\sin t)$$

راه دوم (با تفکیک کسر) [همون قدیمی]

$$L=\frac{2}{s^2(s^2+1)} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{As+B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\frac{2}{s^2(s^2+1)} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} As^3+As+Bs^2+B+Cs^3+Ds^2=2 \\ (A+C)s^3+(B+D)s^2+As+B=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=-2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^2+1} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} 2t-2\sin t \quad \text{همون شد}$$

خب بیا این مثال رو به همه روش هایی که یاد گرفتیم حل کنیم

تا مروری بشه : $y''+y=e^x$

با فرض y'(0)=0 , y(0)=0

راه اول (با کانولوشن)

$$y''+y=e^x \xrightarrow{\text{لاپلاس}} s^2L-s\underbrace{f(0)-f'(0)}_{\text{صفر}}=\frac{1}{s-1} \Rightarrow s^2L \qquad \text{چون} \Rightarrow f(0)=0 \text{ و } f'(0)=0$$

$$y''+y=e^x \xrightarrow{\text{لاپلاس}} s^2L-s\underbrace{f(0)-f'(0)}_{\text{صفر}}+L=\frac{1}{s-1} \Rightarrow s^2L+L=\frac{1}{s-1} \longrightarrow L(s^2+1)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow L=\frac{1}{(s^2+1)(s-1)} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}$$

$$y=(\sin t * e^t)=\int_0^t \sin x\, e^{t-x}\,dx=\int_0^t \sin x\, e^t e^{-x}\,dx=e^t\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx \xrightarrow{\text{خلاصه}} -\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t+\frac{e^t}{2}$$

$$\text{یا همون} \Leftarrow -\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{e^x}{2}$$

راه دوم (با تفکیک کسر)

از ادامه $\Rightarrow L = \dfrac{1}{(s^2+1)(s-1)} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{C}{s-1} = \dfrac{1}{(s^2+1)(s-1)} \Rightarrow As^2 - As + Bs - B + Cs^2 + C = 1 \Rightarrow \dfrac{-\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{s-1}$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ C-B=1 \end{array}\right| \quad A=-\frac{1}{2} \quad C=\frac{1}{2} \quad B=-\frac{1}{2}$$

لاپلاس معکوس $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{L\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} =$

$-\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t$

راه سوم (ضرایب لاگرانژ)

اول به صورت همگن $\Rightarrow y'' + y = 0 \rightarrow m^2 + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta} -4 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}} \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm i \xrightarrow{a+ib} a=0 \quad b=+1$

همیشه مثبت را برمی داریم

$\Rightarrow y_{(x)} = e^{ax}(\cos bx + \sin bx) \longrightarrow y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x \Rightarrow y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\cos x + c_2 \sin x$

$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int -e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x) \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$

$y_{(x)} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + v_1 y_1 + v_2 y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}\underbrace{(\cos^2 x - \sin x\cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x)}_{\text{همیشه یک}} =$

$y_{(x)} = c_1\cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}$ می دونیم که $\Rightarrow y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{e^x}{2}$

جواب خصوصی $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \longrightarrow 0 = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + \frac{e^{(0)}}{2} \Rightarrow 0 = c_1 + \frac{1}{2} \Longrightarrow c_1 = -\frac{1}{2} \\ y'(0)=0 \longrightarrow 0 = -c_1\sin(0) + c_2\cos(0) + \frac{e^{(0)}}{2} \Rightarrow 0 = c_2 + \frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} y(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{e^x}{2}$$

راه چهارم (ضرایب نامعین)

اول به صورت همگن $\Rightarrow$ طبق قسمت قبلی $\Rightarrow y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$

پس می شود جواب ناهمگن $\Rightarrow y(x) = Ae^x \rightarrow y'(x) = Ae^x \rightarrow y'' = Ae^x$

جایگذاری $\Rightarrow y'' + y = e^x \rightarrow Ae^x + Ae^x = e^x \Rightarrow (2A)e^x = e^x \Longrightarrow 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$

$y_{p(x)} = Ae^x = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow y(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x \xrightarrow[y(0)=0 \text{ و } y'(0)=0]{\text{جواب خصوصی طبق قبلی}} y(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{e^x}{2}$

راه پنجم (عملگری)

اول به صورت همگن $\Rightarrow$ طبق قسمت قبلی $\Rightarrow$ $y_1=\cos x$ و $y_2=\sin x$

$$y''+y=e^x \longrightarrow (D^2+1)y=e^x \Rightarrow \frac{1}{D^2+1}e^x=y \xrightarrow[\text{(D) می‌ذاریم ...}]{\text{ضریب توان } e^x \text{ یعنی (1) را جای}} \frac{1}{(1)^2+1}e^x=\frac{e^x}{2}=y_n(x) \longrightarrow$$

(منظور ناهمگنه)

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{e^x}{2} \xrightarrow[y(0)=0 \text{ و } y'(0)=0]{\text{جواب خصوصی طبق قبلی}} y(x)=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{e^x}{2}$$

دیدی که همشون یه جواب میشن...

به روش سری هم میشه حل کرد؟! معلومه فقط اینجا همگن هاشو خوندیم (یعنی طرف راست معادله صفر بود)، اینو می‌سپرم به تو، حل کردی حتما بفرست...